

ECUACIONES DIFERENCIALES COMO MODELOS EN CLASE DE FÍSICA Y DE MATEMÁTICAS

Ruth Rodríguez Gallegos
Universidad Joseph Fourier (Francia)
ITESM Campus Monterrey
ruthrdz@itesm.mx

México

Campo de investigación: Modelación Matemática

Nivel: Medio

Resumen. *Este artículo trata de la enseñanza y el aprendizaje de la modelación matemática en los cursos de física y de matemáticas. En el 2002, un nuevo currículo para el bachillerato en Francia acentuó el papel de las matemáticas como una herramienta para modelar en otras ciencias. Una descripción del proceso de modelación es presentada, así como el análisis de los manuales comúnmente usados en estos cursos. Este análisis revela el proceso de transposición del "proceso de modelación" practicado por los expertos y el proceso que es adaptado finalmente a la escuela. La implementación de una situación experimental con tareas no habituales permite la identificación de la influencia de las praxeologías en los procesos de los estudiantes. La vinculación de algunas dificultades presentes al abordar la situación con la transposición del proceso de modelación también es discutida en este artículo.*

Palabras clave: modelación, física, ecuación diferencial, praxeología

Introducción

Hoy día, la sociedad tiene nuevas expectativas sobre las habilidades de los jóvenes. En particular, algunos estudios internacionales han establecido la importancia del desarrollo de habilidades individuales para modelar y solucionar problemas con contextos de la vida real (Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económico, 2007). En el 2002, los nuevos programas de estudio de preparatoria para las clases de Física y Matemáticas en Francia acentuaron el papel de las Matemáticas como una herramienta para modelar en otras ciencias.

Este trabajo tiene un propósito doble: Por un lado estudiar cómo "vive" el proceso de modelación en el sistema escolar y por otro identificar las dificultades de los estudiantes para modelar un problema de la vida real.

"Modelando" la modelación matemática

El primer paso es establecer una descripción del proceso de modelación que será nuestra referencia en este trabajo. Esta descripción fue construida considerando las definiciones usadas

por Blum y Niss (1991) y Henry (2001). La descripción final del proceso de modelación considerada para este trabajo está representada en la Figura 1 (para más detalles ver Rodríguez, 2007):

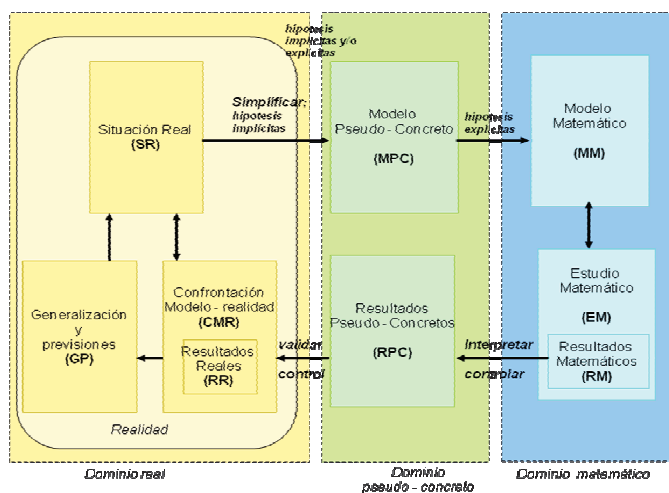


Figura 1: Descripción del proceso de modelación de referencia

En base a la descripción del proceso de "modelación matemática" establecida, fueron analizados algunos manuales comúnmente usados en clases de Física y de Matemáticas. Los resultados de este análisis permitieron caracterizar el proceso de modelación propuesto a "ser enseñado" en el último año de bachillerato.

La transposición didáctica

Este estudio usa la noción de *praxeología* como un instrumento útil para analizar libros de texto. Esta noción fue tomada de la Teoría Antropológica de Chevallard. Una praxeología tiene cuatro componentes (Artaud, 2007): una clase de tipo de tareas T a la que el alumno es usualmente enfrentado; una técnica τ , la cual establece una manera de realizar determinada clase de tareas; una tecnología θ , para cada técnica, la cual establece "el discurso" que justifica y explica la técnica y una teoría Θ , que es "el discurso" que justifica y explica la tecnología. En una primera revisión de los programas de estudio así como de los manuales a analizar, la noción de "Ecuación Diferencial" (ED) fue escogida como nuestra herramienta para modelar con el fin de poder realizar nuestro análisis.

El primer resultado: El análisis de los libros

El análisis de tres libros de texto comúnmente usados en clase de matemáticas permitió la identificación de los tipos de tareas siguientes: establecer una ecuación diferencial que modela una situación real en términos pseudo-concretos (T_{ED}), encontrar una solución general de la ED

(T_{SG}), encontrar una solución particular usando una condición inicial (T_{SP}) y responder una pregunta, formulada en términos pseudo-concretos, en base a los resultados matemáticos obtenidos (T_{RP}).

La tarea TED "establecer una ED para modelar una situación real" raras veces es solicitada a los estudiantes ya que los ejercicios proporcionan la mayoría de las veces el modelo. En algunas ocasiones esta tarea se reduce a "justificar" que un modelo dado por el enunciado es efectivamente el modelo correcto. También se observó que en clase de Matemáticas, "resolver" una ecuación diferencial significa hacer uso un teorema antes demostrado por el profesor en clase para proponer una solución a la ED. Como la escritura del modelo matemático es una etapa importante en el proceso de modelación y este primer análisis pone en evidencia la ausencia de este tipo de tareas en la clase de Matemáticas, entonces el dominio del estudio se extendió a la clase de Física. Tres manuales de la clase de Física fueron analizados, en particular el capítulo "Circuito Resistencia-Capacitor (RC)" de manera análoga a los libros de texto de Matemáticas. Algunos tipos de tareas identificadas en los libros de texto de la clase de Física son: representar un diagrama de circuito eléctrico (usualmente RC), (T_{CE}); establecer una ecuación diferencial que modele el voltaje en el capacitor $U_C(t)$ presente en el circuito (T_{ED}); encontrar una solución particular (verificando que una función proporcionada en el enunciado del ejercicio) es la solución de la ecuación diferencial (T_{SP}), determinar la corriente eléctrica $i(t)$ en el circuito usando la función de voltaje en el capacitor $U_C(t)$ (TEC).

Aunque el proceso de modelación es llevado a cabo de manera más amplia en la clase de Física que en la clase de Matemáticas, algunos hechos importantes fueron observados: el tipo de tarea T_{CE} "Representar un esquema de circuito eléctrico" aparece en los libros de texto, ésta no es una tarea comúnmente asignada a los estudiantes. La tarea TED "Establecer un modelo matemático (ED)" es usualmente asignada a los estudiantes pero los pasos para hacerlo son proporcionados en el ejercicio. En general se observa que en ambas clases existen pocos ejercicios para confrontar al estudiante a la transición entre las etapas Resultados Pseudo-Concretos a la Confrontación Modelo-Realidad. Henry (2001) establece que ésta es una transición importante a ser considerada desde un punto de vista didáctico si se desea enseñar la modelación en clase. Lo anterior nos ha conducido al diseño de una situación experimental para lograr enfrentar a los alumnos a diferentes transiciones entre etapas normalmente ausentes en el ámbito escolar.

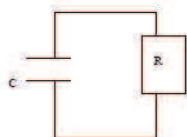
Una breve descripción de la situación experimental

El segundo objetivo de este trabajo es identificar las dificultades de los estudiantes para modelar un problema de la vida real construido con base en los resultados del análisis de libros. Tres características de diseño de esta situación experimental son: enfrentar a los estudiantes a la transición de Situación Real + Modelo Pseudo-Concreto hacia la construcción del Modelo Físico; no proporcionar ninguna guía a los estudiantes en cuanto la escritura del Modelo Matemático; enfrentar a los estudiantes a la transición entre la etapa Resultados Pseudo-Concretos → Confrontación Modelo-Realidad.

En la situación experimental diseñada se pretende enfrentar a los estudiantes a modelar el funcionamiento de un desfibrilador cardíaco. Este dispositivo electrónico aplica un choque eléctrico a un ser humano para restaurar el ritmo de su corazón. Una breve descripción sobre el funcionamiento de este dispositivo es incluida en el texto introductorio de la situación en términos pseudo-concretos y físicos (eléctricos). A continuación, analizaremos las primeras dos de las cinco preguntas que conforman la situación experimental.

Instrucción de la Pregunta A:

Tenemos que modelar el desfibrilador como un circuito eléctrico (similar a aquellos estudiados en clase). Dibuje un circuito eléctrico y realice el diagrama justificando su elección



Una respuesta posible (y correcta) a esta pregunta es el diagrama de un circuito RC como el mostrado en la Figura III, donde la resistencia R representa al cuerpo del paciente mientras que el capacitor C al dispositivo desfibrilador.

Figura 2: Respuesta posible a la pregunta A

Instrucción de la Pregunta B

Establezca un modelo (una ecuación diferencial) para la evolución del voltaje en el desfibrilador. Justifique las leyes empleadas para el establecimiento del modelo.

Una respuesta posible (y correcta) para esta pregunta es la ED: $\frac{dU_c}{dt} + \frac{1}{RC} U_c = 0$.

Características de la experimentación

La experimentación fue realizada con 25 estudiantes de último año de preparatoria en tres diferentes instituciones francesas. La experimentación fue llevada a cabo después de la enseñanza del tema Circuitos Eléctricos. Se solicitó a los estudiantes trabajar por pareja la resolución de la situación durante aproximadamente una hora.

Análisis de la Pregunta A

Una regularidad encontrada en las respuestas a la pregunta A es la dificultad de los estudiantes en proponer un diagrama con todos los elementos de un circuito eléctrico como resistencias y capacitores. A este respecto identificamos la aparición de algunas configuraciones que denominamos "híbridas" ya que mezclan elementos de naturaleza pseudo-concreta con elementos de naturaleza puramente física. La dificultad de insertar una resistencia como parte del circuito eléctrico para remplazar al paciente aparece en la mayor parte de las respuestas. A pesar de que la palabra "resistencia" aparece en el texto de la actividad, no hace ninguna referencia específica a un término físico. Este hecho puede ser observado en las respuestas proporcionadas por dos parejas de estudiantes:

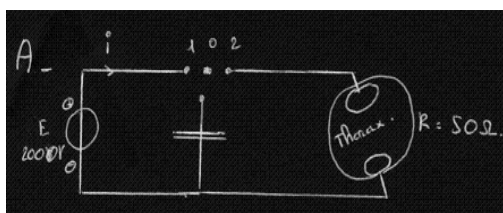


Figura 3

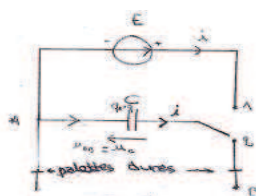


Figura 4

En la figura 3 el tórax del paciente es representado por un círculo grande y los electrodos por círculos más pequeños. Incluso si la leyenda " $R = 50 \Omega$ " se refiere a una resistencia, es notable la dificultad para los estudiantes de usar la representación convencional para la resistencia (rectángulo). En la figura 4, los electrodos son representados por los estudiantes ("palettes dures" en francés) pero en este caso, los estudiantes no hacen ninguna referencia a la posible presencia

de una resistencia en el circuito. Creemos que los estudiantes no pueden concebir al paciente como una parte del circuito ya que el paciente como ser humano no tiene para ellos ninguna naturaleza eléctrica y por lo tanto no puede representarse en términos eléctricos.

Algunos otros estudiantes propusieron un esquema de modelo físico como el mostrado en la siguiente figura 5. En esta figura, el diagrama de los estudiantes podemos ubicarlo en el Dominio Pseudo-Concreto ya que los elementos mostrados en el diagrama no corresponden a las representaciones de elementos físicos normalmente presentes en un circuito eléctrico. Esta respuesta nos cuestiona sobre la comprensión de los estudiantes de la pregunta planteada. Esta dificultad puede ser ubicada en la transición entre la Situación Real + Modelo Pseudo-Concreto hacia la escritura del Modelo Físico.

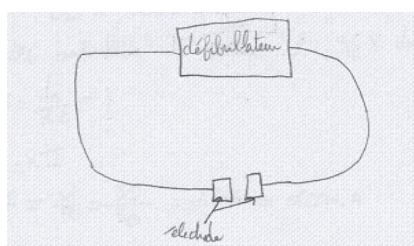


Figura 5

Respecto a las praxeologías observadas en los libros de textos, ninguna técnica fue identificada para realizar este tipo de tareas; sin embargo esta transición Situación Real/Modelo Pseudo-concreto a Modelo Físico parece constituir un paso importante desde el punto de vista de la modelación.

Análisis de la Pregunta B

Para esta pregunta, varias dificultades fueron identificadas al momento de proponer una ecuación diferencial para modelar la variación del voltaje en el capacitor presente en el circuito. Algunos estudiantes olvidaron las leyes de la Física para hacer esto así como la manera de establecer una relación entre las magnitudes implicadas. Sin embargo, también se observó el uso de leyes o principios físicos enunciados de manera incorrecta. Algunos estudiantes establecen una ED para modelar la carga $q(t)$ en el capacitor, esto es: $\frac{dq}{dt} + \frac{1}{RC}q = 0$. Es importante mencionar lo anterior ya que esta manera de proceder no fue observada como técnica existente en los manuales analizados; sin embargo parece "natural" para los estudiantes el establecer esta ecuación diferencial.

Otra dificultad observada es la elección por estudiar la carga o la descarga del capacitor sobre la resistencia. El interés en este caso debía ser el estudiar la descarga del desfibrilador en el paciente,

pero un número importante de estudiantes no parece considerar este hecho. En muchos casos, la pregunta C permite la validación del modelo inicialmente propuesto en B y esto ayuda a los estudiantes a modificar la ecuación diferencial propuesta. Gracias a la tarea de verificar si una función (dada en el ejercicio) es o no solución de la ED, ellos pueden validar la respuesta a la pregunta B y eventualmente corregir el modelo propuesto en B. Esta dificultad evidencia la poca o nula relación para los estudiantes entre los fenómenos físicos estudiados (la situación real descrita) y la modelación propuesta (ecuación diferencial). La realización de los estudiantes de la situación experimental ilustra la importancia de una comprensión adecuada del fenómeno a modelar y del rol del modelo "pseudo-concreto" concebido por los alumnos para el establecimiento de los modelos físico y matemático adecuados para estudiar el fenómeno descrito por la situación.

Conclusión

Los resultados de este estudio coinciden con el trabajo de Chevallard (1991) respecto a la distancia existente entre el proceso de modelación que finalmente se pretende enseñar (saber a enseñar) en los cursos de matemáticas y física en preparatoria y el proceso de modelación de los expertos (saber sabio). La descripción del proceso de modelar propuesta como referencia en este trabajo puede ser modificada con base en algunos aspectos observados en las actividades de los estudiantes. Es recomendable una discusión entre expertos de la comunidad de Matemática Educativa sobre las diferentes concepciones de modelación y elegir aquella que deba ser llevada al ámbito escolar. Esta descripción de modelación puede variar dependiendo del campo científico donde una situación específica esté inmersa. Un hallazgo relevante de este trabajo es el enfatizar la importancia de la construcción de un modelo pseudo-concreto adecuado para establecer el modelo físico y matemático pertinente a la problemática en cuestión. Así mismo, se encuentra absolutamente necesario que esta transición entre etapas sea llevada al ámbito escolar. La riqueza de la retroalimentación de una tarea sobre otra en la situación experimental para desarrollar una solución apropiada a cada pregunta planteada es también un hallazgo que este estudio evidencia. Lo anterior es una característica a tener en cuenta en el diseño de futuras actividades para el aprendizaje de la modelación. Es recomendable el diseño de actividades donde todas las fases del proceso de modelación estén presentes si realmente se pretende que el alumno desarrolle

habilidades en este rubro. Así mismo, la necesidad de cursos de capacitación para los profesores de ambas disciplinas respecto a la enseñanza de modelación es un aspecto que se debe considerar a este respecto.

Referencias bibliográficas

Artaud, M. (2007). Some conditions for modeling to exist in mathematics classrooms. *Modeling and Applications in Mathematics Education. The 14th ICMI Study* (pp. 371-378). New York: International Commission on Mathematical Instruction ICMI.

Blum, W. & Niss, M. (1991). Applied mathematical problem solving, modeling, applications, and links to other subjects – State, trends and issues in mathematics instruction. *Educational Studies in Mathematics* 22(1), 37-68.

Chevallard, Y. (1991). *La transposition didactique - Du savoir savant au savoir enseigné*, deuxième édition. Grenoble: La Pensée Sauvage Éditions.

Henry, M. (2001). Notion de modèle et modélisation dans l'enseignement. En Henry, M. (Ed), *Autour de la modélisation en probabilités* (pp. 149-159). Besançon : Commission Inter-IREM Statistique et Probabilités.

OCDE (2007). *PISA 2006: Science Competencies for Tomorrow's World Executive Summary* 55. Extraído el 13 de octubre de 2008 desde <http://www.pisa.oecd.org/dataoecd/15/13/39725224.pdf>

Rodriguez, R. (2007). *Les équations différentielles comme outil de modélisation en Classe de Physique et des Mathématiques au lycée : une étude de manuels et de processus de modélisation en Terminale S*. Tesis de Doctorado no publicada, University Joseph Fourier.